Title	On some one variable axioms over intuitionistic S4
Author(s)	志村, 立夫
Citation	数理解析研究所講究録 (1997), 1021: 70-85
Issue Date	1997-12
URL	http://hdl.handle.net/2433/61682
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
1021巻 1997年 70-85

On some one variable axioms over intuitionistic S4.

志村 立矢 (日本大学 理工)

1 はじめに. (一変数公理と SSP とその拡張)

細井は古典命題論理 $\mathbf{C} = \mathbf{H} + p \vee \neg p$ および $\mathbf{H} + \neg p \vee \neg\neg p$ の公理は次のような性質を持つことを指摘した.

Lemma 1 (細井) 論理式 B に対し, var (B) で B に現れる命題変数全体の集合を表す. このとき次が成り立つ.

1. $$\mathbf{H} \vdash (\bigwedge_{p \in \mathrm{var}\ (B)} p \vee \neg p) \supset (B \vee \neg B),$$

2. $$\mathbf{H} \vdash (\bigwedge_{p \in \mathrm{var}\ (B)} \neg p \vee \neg\neg p) \supset (\neg B \vee \neg\neg B).$$

Proof.) B の構成に関する帰納法による. *Q.E.D.*

Corollary 2 (細井) 論理式 B に対し, 次が成り立つ.

1. $\mathbf{C} \vdash B$ *if and only if* $\mathbf{H} \vdash (\bigwedge_{p \in \mathrm{var}\ (B)} p \vee \neg p) \supset B,$

2. $\mathbf{H} + \neg p \vee \neg\neg p \vdash B$ *if and only if* $\mathbf{H} \vdash (\bigwedge_{p \in \mathrm{var}\ (B)} \neg p \vee \neg\neg p) \supset B.$

この系の性質は後に simple substitution property (SSP) と名付けられ, 佐々木により多変数の場合も含めて研究されている.

小野は一変数公理が SSP を持つならば, それにより公理化される論理では Craig の補間定理が成立することを指摘した.

Lemma 3 命題変数として p のみを含むような論理式 $A(p)$ が *SSP* を持つならば, $\mathbf{H} + A(p)$ では *Craig* の補間定理が成立する.

したがって, 一変数公理で *SSP* を持つものは細井による例しかない.

Proof.) $\mathbf{H} + A(p) \vdash B \supset C$ とする. このとき, SSP により

$$\mathbf{H} \vdash \bigwedge_{p \in \mathrm{var}\ (B \supset C)} A(p) \supset (B \supset C)$$

が成り立つ．したがって

$$\mathbf{H} \vdash (B \wedge \bigwedge_{p \in \mathrm{var}\,(B)} A(p)) \supset (\bigwedge_{p \in \mathrm{var}\,(C)} A(p) \supset C)$$

となるが，$\mathbf{H}$ では Craig の補間定理が成立するので，$\mathrm{var}\,(D) \subseteq \mathrm{var}\,(B) \cap \mathrm{var}\,(C)$ であるような論理式 D で

$$\mathbf{H} \vdash (B \wedge \bigwedge_{p \in \mathrm{var}\,(B)} A(p)) \supset D,$$

$$\mathbf{H} \vdash D \supset (\bigwedge_{p \in \mathrm{var}\,(C)} A(p) \supset C)$$

が成立するものが存在する．したがって，

$$\mathbf{H} + A(p) \vdash B \supset D,$$

$$\mathbf{H} + A(p) \vdash D \supset C$$

となりこれは $\mathbf{H} + A(p)$ で Craig の補間定理が成立することを示している． *Q.E.D.*

様相論理においても SSP を考えることができ，中間論理のときと同様に一変数論理式が SSP を持つならばこれにより公理化可能な論理では Craig の補間定理が成立することがわかる．これは，Maksimova [5] が指摘している．

Lemma 4 (Maksimova) $\mathbf{S4} + \Box\Diamond p \supset \Diamond\Box p$ および$\mathbf{S4} + \Box\Diamond p \equiv \Diamond\Box p$ は *SSP* を持つ．
したがって，これらの論理では *Craig* の補間定理が成立する．

では，細井によって SSP が示された論理式の McKinsey-Tarski translation を考えたとき SSP は成立するであろうか．この答は否定的である (例えば $\mathbf{S5} = \mathbf{S4} + T(p \vee \neg p)$ の場合は佐々木により示されている)．

だが，これらの論理での Craig の補間定理の成立を示すためには，SSP よりも弱い次の性質で十分である．

Fact 5 論理式 B の部分論理式全体の集合を Sub (B) で表す．このとき，次が成り立つ．

1. $\mathbf{S5} \vdash B$ *if and only if* $\mathbf{S4} \vdash (\bigwedge_{\Box C \in \mathrm{Sub}\,(B)} \Box C \vee \Box\neg\Box C) \supset B,$

2. $\mathbf{S4.2} \vdash B$ *if and only if* $\mathbf{S4} \vdash (\bigwedge_{\Box C \in \mathrm{Sub}\,(B)} \Box\neg\Box C \vee \Box\Diamond\Box C) \supset B.$

このような性質を持つ一変数論理式により公理化される論理は他に次のようなものがある．

$$\begin{aligned}\mathbf{Triv} &= \mathbf{S4} + p \supset \Box p \\ \mathbf{S4Grz} &= \mathbf{S4} + \Box(\Box(p \supset \Box p) \supset p) \supset p \\ \mathbf{S4.1.4} &= \mathbf{S4} + \Box(\Box(p \supset \Box p) \supset p) \supset (\Box\Diamond\Box p \supset p).\end{aligned}$$

本稿では直観主義様相論理上で類似の性質を持つ一変数論理式の例を与え，これらにより公理化される論理での Craig の補間定理や finite model property の成立を示す．

2 直観主義様相論理の semantics と sequent style system.

われわれが考察する論理は，前原 [4] と Prawitz-Malmnäs [7] に現れたものであるが，これは小野 [6] により $\mathbf{L}_0$ と名付けられ深く研究されている．

Definition 6 (直観主義様相命題論理 $\mathbf{intS4}_\Box$) $\mathbf{intS4}_\Box$ は論理記号として $\supset, \wedge, \vee, \neg, \Box$ を持つ言語 $\mathcal{L}_\Box$ 上の公理及び推論規則として次のものを持つ論理である．

- 直観主義命題論理 $\mathbf{H}$ の公理,
- (K) $\Box(A \supset B) \supset (BoxA \supset \Box B)$,
- (T) $\Box A \supset A$,
- (4) $\Box A \supset \Box\Box A$,
- modus ponens,
- necessitation rule,
- substitution rule.

$\mathbf{intS4}_\Box$ の拡張で modus ponens, necessitation および substitution について閉じている論理式の集合を直観主義様相論理と呼ぶことにする．

直観主義論理上では $\Diamond A$ を $\neg\Box\neg A$ で定義することはできない．

Definition 7 (直観主義様相 frame (小野 frame) [6]) $\mathbf{M} = \langle M, \leq, R\rangle$ が次の条件を満たすとき，直観主義様相 frame という．

- $\leq$ は M 上の半順序である．
- R は M 上の擬順序である．
- R は $\leq$ の拡張である．すなわち $a \leq b$ ならば aRb となる．

直観主義様相 frame $\mathbf{M}$ の元 $a \in M$ が与えられたとき，aRb となる $b \in M$ 全体は $\leq$ と R の制限により直観主義様相 frame となる．これを a が生成する部分 frame と呼ぶ．ある $a \in M$ が生成する部分 frame が $\mathbf{M}$ 自身となるとき，$\mathbf{M}$ は rooted であるという．

Definition 8 (直観主義様相 model) 直観主義様相 frame $\mathbf{M} = \langle M, \leq, R\rangle$ に対し，$a \in M$ と命題変数 p の関係 $a \models p$ が $\mathbf{M}$ 上の付値であるとは

$$a \models p,\ a \leq b \Rightarrow b \models p$$

が成立することをいう．

$\models$ は次のようにして $a \in M$ と $\mathcal{L}_\Box$ 論理式 A との関係に拡張できる．

- $a \models A \wedge B \Leftrightarrow (a \models A$ かつ $a \models B)$,
- $a \models A \vee B \Leftrightarrow (a \models A$ または $a \models B)$,
- $a \models A \supset B \Leftrightarrow \forall b\ ((a \leq b$ かつ $b \models A) \Rightarrow b \models B)$,
- $a \models \neg A \Leftrightarrow \forall b\ (a \leq b$ ならば $b \not\models A)$,
- $a \models \Box A \Leftrightarrow \forall b\ (aRb$ ならば $b \models A)$.

直観主義様相 frame **M** とその上の付値 $\models$ の組を直観主義様相 model という.

M 上の任意の付値 $\models$ と任意の $a \in M$ に対し $a \models A$ となるとき，A は **M** で valid であるといい，$\mathbf{M} \models A$ と記す.

$$L(\mathbf{M}) = \{A \mid \mathbf{M} \models A\}$$

と定義する.

この semantics は中間論理や様相論理のときと同様に次の性質を持つことがわかる.

Fact 9 **(小野 [6])** **M** を直観主義様相 *frame*, $\models$ を **M** 上の付値とする.

1. $a \leq b$ かつ $a \models A$ ならば $b \models A$.

2. $\mathbf{M}_a$ を a が生成する **M** の部分 *frame*, $\models'$ を $\models$ の M_a への制限とするとき,

$$a \models A \textit{ if and only if } a \models' A.$$

3. $L(\mathbf{M})$ は直観主義様相論理となる.

Definition 10 直観主義様相論理 **L** は直観主義様相 frame の族 $\mathbf{M}_i$ が存在して,

$$\mathbf{L} = \bigcap L(\mathbf{M}_i)$$

と表すことができるとき，完全であるという．さらに各 $\mathbf{M}_i$ が有限なものをとることができるとき，**L** は finite model property を持つという.

Theorem 11 (Ono [6]) $\mathbf{intS4}_\Box$ はこの *semantics* に関し完全であり，*finite model property* を持つ.

この定理は canonical model の存在と filtration method により示すことができるが，sequent calculus と Kripke type semantics との関連で証明することもできる.

Lemma 12 (前原 [4], cf. Prawits-Malmnäs [7]) $\mathbf{intS4}_\Box$ は *Gentzen's* の **LJ** または前原の **LJ′** に次の推論規則を付け加えて得ることができる.

$$(\Box\rightarrow)\quad \frac{A, \Gamma \rightarrow \Theta}{\Box A, \Gamma \rightarrow \Theta}$$

$$(\rightarrow\Box)\quad \frac{\Box\Gamma \rightarrow A}{\Box\Gamma \rightarrow \Box A}$$

これらの体系をそれぞれ $\mathbf{GintS4}_\Box$, $\mathbf{G'intS4}_\Box$ と名付けると，$\mathbf{GintS4}_\Box$ と $\mathbf{G'intS4}_\Box$ ではともに *cut-elimination theorem* が成立する.

LJ の代わりに **LK** としたものは **S4** に対する cut-free な形式化であることに注意せよ.
Theorem 11 は $\mathbf{G'intS4}_\Box$ の cut-elimination と同時に示すことができる.
一方 $\mathbf{GintS4}_\Box$ の cut-elimination は Craig の補間定理を導くことが知られている.

Theorem 13 (Boričić [2]) $\mathbf{intS4}_\Box$ では *Craig* の補間定理が成立する.

Proof.) $\mathbf{GintS4}_\Box$ では cut-elimination が成立するので前原の方法を用いればよい. *Q.E.D.*

3 filtration method

まず準備として我々がこの節で扱う一変数公理が直観主義様相 frame で真となるための条件について述べておこう.

Lemma 14 $\mathbf{M} = \langle M, \leq, R\rangle$ を直観主義様相 *frame* とする.

1. $\Box p \vee \Box\neg\Box p$ が $\mathbf{M}$ で真となるための必要十分条件は R が同値関係であることである.

2. $\Box\neg\Box p \vee \Box\neg\Box\neg\Box p$ が $\mathbf{M}$ で真となるための必要十分条件は任意の $a, b_1, b_2 \in M$ に対し次をみたす $c \in M$ が存在することである.

aRb_1, aRb_2 ならば b_1Rc, b_2Rc.

3. $\Box p \vee \neg\Box p$ が $\mathbf{M}$ で真となるための必要十分条件は

$a \leq b$ ならば bRa

が成立することである.

4. $p \supset \Box p$ が $\mathbf{M}$ で真となるための必要十分条件は $\leq = R$ が成立することである.

5. $p \vee \neg p$ が $\mathbf{M}$ で真となるための必要十分条件は $\leq$ が同値関係であることである.

6. $\neg p \vee \neg\neg p$ が $\mathbf{M}$ で真となるための必要十分条件は任意の $a, b_1, b_2 \in M$ に対し次をみたす $c \in M$ が存在することである.

$$a \leq b_1,\ a \leq b_2 \text{ ならば } b_1 \leq c,\ b_2 \leq c.$$

以下の証明は filtration method に基づくものである.

Lemma 15 $A(p)$ を次の論理式のいづれかとする.

$$\Box p \vee \Box\neg\Box p,\ \Box\neg\Box p \vee \Box\neg\Box\neg\Box p,\ \Box p \vee \neg\Box p.$$

このとき,

$$\mathbf{intS4}_{\Box} + A(p) \vdash B \Leftrightarrow \mathbf{intS4}_{\Box} \vdash (\bigwedge_{\Box C \in \mathrm{Sub}(B)} A(C)) \supset B.$$

が成立する.

Proof.) $\Rightarrow$ を示せば十分であるから対偶を示す.

$$\mathbf{intS4}_{\Box} \nvdash (\bigwedge_{\Box C \in \mathrm{Sub}(B)} \Box A(C)) \supset B$$

と仮定する. $\mathbf{intS4}_{\Box}$ の finite model property により次の条件をみたす有限 rooted frame $\mathbf{M} = \langle M, \leq, R \rangle$ 上の model $\langle \mathbf{M}, \models \rangle$ が存在する.

$$0 \models \Box A(C),\ (\Box C \in \mathrm{Sub}\ (B)),$$

$$0 \not\models B.$$

- $A(p)$ が $\Box p \vee \Box\neg\Box p$ のとき.

  $\mathbf{M}' = \langle M', \leq', R' \rangle$ と $\models'$ を次のように定める.

  $$M' = M,\ \leq' = \leq,\ R' = M \times M,$$

  $$a \models' p \Leftrightarrow a \models p.$$

  R' は同値関係なので $A(p)$ は $\mathbf{M}'$ で真となる. よって次の claim を示し, D が B 自身のときを考えれば

  $$\mathbf{intS4}_{\Box} + A(p) \nvdash B$$

  を示すことができる.

  claim $D \in \mathrm{Sub}\ (B)$ に対し,

$$a \models' D \text{ if and only if } a \models D.$$

D が $\Box C$ の形のときを調べれば十分である．R' は R よりも強いので

$$a \models' D \text{ ならば } a \models D$$

は明らか．
逆に $a \not\models' \Box C$ と仮定する．$b \in M$ が存在し，

$$b \not\models' C$$

となるので帰納法の仮定より，

$$b \not\models C.$$

$0Rb$ であるから

$$0 \not\models \Box C$$

であり，$0 \models A(C)$ より，

$$0 \models \Box\neg\Box C.$$

したがって

$$a \models \neg\Box C$$

となり，特に

$$a \not\models \Box C.$$

- $A(p)$ が $\Box\neg\Box p \vee \Box\neg\Box\neg\Box p$ のとき．
$a \in M$ が R に関する極大元であるということを

$$aRb \text{ ならば } bRa$$

により定義する．
$\mathbf{M}' = \langle M', \leq', R' \rangle$ と $\models'$ を次のように定める．

$$M' = M, \ \leq' = \leq,$$

$$aR'b \Leftrightarrow (aRb \text{ または } b \text{ は } R \text{ に関する極大元}),$$

$$a \models' p \Leftrightarrow a \models p.$$

先ほどと同様に次を示せばよい．

claim　$D \in \mathrm{Sub}\,(B)$ に対し，

$$a \models' D \text{ if and only if } a \models D.$$

D が $\Box C$ の形のときを調べれば十分である．R' は R よりも強いので

$$a \models' D \text{ ならば } a \models D$$

は明らか．
逆に $a \not\models' \Box C$ と仮定する．$aR'b$ となる $b \in M$ が存在し，

$$b \not\models' C$$

となるので帰納法の仮定より，

$$b \not\models C.$$

aRb ならば

$$a \not\models \Box C$$

である．
一方 b が R に関し極大ならば

$$b \not\models \neg\Box\neg\Box C$$

なので $0 \models A(C)$ より，

$$0 \models \Box\neg\Box C.$$

したがって

$$a \models \neg\Box C$$

となり，特に

$$a \not\models \Box C.$$

- $A(p)$ が $\Box p \vee \neg\Box p$ のとき．

  $\mathbf{M}' = \langle M', \leq', R' \rangle$ と $\models'$ を次のように定める．

$$M' = M,\ \leq' = \leq,$$

$$R' = \{(a,b) | aRb \text{ または } b \leq a\} \text{ の推移閉包}$$

$$a \models' p \Leftrightarrow a \models p.$$

claim $\Box C \in \mathrm{Sub}\,(B)$ と $a \leq b$ に対し，

$$b \models \Box C \text{ ならば } a \models \Box C.$$

$b \models \Box C$ とすれば $a \not\models \neg\Box C$ なので $a \models \Box C \vee \neg\Box C$ より $a \models \Box C$.

claim $\Box C \in \mathrm{Sub}\,(B)$ に対し，

$$a \models' \Box C \text{ ならば } a \models \Box C.$$

$a \not\models' \Box C$ と仮定すれば $aR'b$ かつ $b \not\models' C$ となる b が存在する．したがって $c_0, c_1, \ldots, c_n \in M$ が存在し，

$$a = c_0 S c_1 S \cdots S c_n = b\ (S = R \text{ または } \leq^{-1})$$

となるが前の claim を用いて n に関する帰納法で $a \not\models \Box C$ を示すことができる．

Q.E.D.

Lemma 16 $A(p)$ を次の論理式とする．

$$p \supset \Box p.$$

このとき，

$$\mathbf{intS4}_{\Box} + A(p) \vdash B \Leftrightarrow \mathbf{intS4}_{\Box} \vdash (\bigwedge_{p \in \mathrm{var}(B)} \Box A(p)) \supset B.$$

が成立する．

Proof.)

$$\mathbf{intS4}_{\Box} \not\vdash (\bigwedge_{p \in \mathrm{var}(B)} \Box A(p)) \supset B$$

と仮定する．$\mathbf{intS4}_{\Box}$ の finite model property により次の条件をみたす有限 rooted frame $\mathbf{M} = \langle M, \leq, R \rangle$ 上の model が存在する．

$$0 \models \Box A(p),\ (p \in \mathrm{var}\ (B)),$$

$$0 \not\models B$$

このとき，同値関係 $\sim$ を

$$a \sim b \Leftrightarrow (aRb \text{ かつ } bRa)$$

により定め，

$$M' = M/\sim$$

とおき，$a \in M$ の属する同値類を $\overline{a}$ で表す．このとき

$$\overline{a}R'\overline{b} \Leftrightarrow aRb$$

は順序関係であり，$\mathbf{M}' = \langle M', R', R' \rangle$ は直観主義様相 frame となる．

次の claim が成立することは容易に示され，これより Lemma の主張が得られる。

claim　$\mathbf{M}'$ 上の付値 $\models'$ を

$$\overline{a} \models' p \Leftrightarrow a \models p$$

により定めることができ，$D \in \mathrm{Sub}\ (B)$ に対し，次が成り立つ．

$$a \models' D \text{ if and only if } a \models D.$$

Q.E.D.

Lemma 17　$A(p)$ を次の論理式のいづれかとする．

$$p \vee \neg p, \neg p \vee \neg\neg p.$$

このとき，

$$\mathbf{intS4}_{\Box} + A(p) \vdash B \Leftrightarrow \mathbf{intS4}_{\Box} \vdash (\bigwedge_{p \in \mathrm{var}(B)} \Box A(p)) \wedge (\bigwedge_{\Box C \in \mathrm{Sub}(B)} \Box A(\Box C)) \supset B.$$

が成立する．

Proof.)　$\Rightarrow$ を示せば十分であるから対偶を示す．

$$\mathbf{intS4}_{\Box} \not\vdash (\bigwedge_{p \in \mathrm{var}(B)} \Box A(p)) \wedge (\bigwedge_{\Box C \in \mathrm{Sub}(B)} \Box A(C)) \supset B$$

と仮定する．$\mathbf{intS4}_\Box$ の finite model property により次の条件をみたす有限 rooted frame $\mathbf{M} = \langle M, \leq, R\rangle$ 上の model が存在する．

$$0 \models \Box A(p),\ (p \in \mathrm{var}\ (B)),$$

$$0 \models \Box A(C),\ (\Box C \in \mathrm{Sub}\ (B)),$$

$$0 \not\models B$$

- $A(p)$ が $p \vee \neg p$ のとき．
  $\leq$ の拡張となる最小の同値関係を $\sim$ とする．

  $$M' = M/\sim$$

  とおき，$a \in M$ の属する同値類を $\overline{a}$ で表す．このとき，R' を

  $$\overline{a}R'\overline{b} \Leftrightarrow \exists c, d(a \sim c, b \sim d \text{ かつ } cRd)$$

  により定める．

  claim R' は M' 上の擬順序であり，$\mathbf{M}' = \langle M', =, R'\rangle$ 上の付値 $\models'$ を

  $$\overline{a} \models' p \Leftrightarrow a \models p$$

  により定義できる．また，$C \in \mathrm{Sub}\ (B)$ に対し，

  $$a \models D \text{ if and only if } \overline{a} \models' D$$

  が成立する．

  $a \leq b$ かつ $b \models p$ ならば $a \models p \vee \neg p$ より $a \models p$ となることを用いれば，$a \sim b$ ならば $a \models p$ if and only if $b \models p$ が成立することが確かめられる．これより $\models'$ が well-defined であることが導かれる．

  D が $\Box C$ の形のときを示す．$a \models \Box C$ とする．$a \models \Box C \vee \neg\Box C$ より $a \sim c$ ならば $c \models \Box C$ が成立することに注意すると，$\overline{a}R'\overline{b}$ ならば $b \models \Box C$ となるので特に $b \models C$．帰納法の仮定により，$b \models' C$ となり $a \models' \Box C$ が成立する．

- $A(p)$ が $\neg p \vee \neg\neg p$ のとき．

  $$\{(a, b) \mid a, b \text{ は } \leq \text{ に関し極大で } \exists c(c \leq a, c \leq b)\}$$

  を含む最小の同値関係を $\sim$ とする．

$$M' = M/\sim$$

とおき，$a \in M$ の属する同値類を $\overline{a}$ で表す．このとき，R' を

$$\overline{a}R'\overline{b} \Leftrightarrow \exists c, d(a \sim c, b \sim d \text{ かつ } cRd)$$

により定める．このとき先ほどと同様に，つぎが成立する．

claim R' は M' 上の擬順序であり，$\mathbf{M}' = \langle M', =, R' \rangle$ 上の付値 $\models'$ を

$$\overline{a} \models' p \Leftrightarrow a \models p$$

により定義できる．また，$C \in \mathrm{Sub}\,(B)$ に対し，

$$a \models D \text{ if and only if } \overline{a} \models' D$$

が成立する．

Q.E.D.

Corollary 18 $A(p)$ を次の論理式のいずれかとする．

$\Box p \vee \Box\neg\Box p$, $\Box\neg\Box p \vee \Box\neg\Box\neg\Box p$, $\Box p \vee \neg\Box p$,

$p \supset \Box p$, $p \vee \neg p, \neg p \vee \neg\neg p$.

このとき，$\mathbf{intS4}_{\Box} + A(p)$ は *finite model property* を持ち，*Craig* の補間定理が成立する．

Remark Luppi [3] は直観主義様相論理で Craig の補間定理が成立するための必要十分条件を代数的に与え，$\mathbf{intS4}_{\Box}$ および $\mathbf{intS4}_{\Box} + \Box p \vee \Box\neg\Box p$ で Craig の補間定理が成立することを示している．

4 cut-free systems

$\mathbf{S4Grz} = \mathbf{S4} + \Box(\Box(p \supset \Box p) \supset p) \supset p$ は **LK** に $(\Box\rightarrow)$ と次の推論規則を付け加えた体系として定義でき，しかもこの体系は cut-free であることが知られている．([1])

$$(\mathbf{Grz} \rightarrow \Box)\frac{\Box\Gamma, \Box(A \supset \Box A) \rightarrow A}{\Box\Gamma \rightarrow \Box A}$$

この体系の cut-elimination の syntactical な証明は，**LJ** に $(\Box\rightarrow)$ と $(\mathbf{Grz} \rightarrow \Box)$ を付け加えた体系にも適用できることがわかる．したがって次が得られた．

Lemma 19 $A(p)$ を $\Box(\Box(p \supset \Box p) \supset p) \supset p$ とすれば**LJ** に $(\Box\to)$ と $(\mathbf{Grz}\to\Box)$ を付け加えた体系は $\mathbf{intS4}_{\Box} + A(p)$ の *cut-free* な形式化である.

Lemma 20

$$\mathbf{intS4}_{\Box} + A(p) \vdash B \Leftrightarrow \mathbf{intS4}_{\Box} \vdash (\bigwedge_{\Box C \in \mathrm{Sub}(B)} \Box A(C)) \supset B.$$

Proof.) $\Rightarrow$ を示せば十分である.

B の cut-free な証明を考えると次のような弱い形の subformula property が成立することが証明の構成に関する帰納法で示せる.

証明中に positive に現れる $\Box C$ の形の論理式は B に positive に現れる.

したがって, 証明中の $(\mathbf{Grz}\to\Box)$ の principal formula $\Box C$ はすべて B の subformula である. これより補題の主張がただちに従う. *Q.E.D.*

Lemma 21 (cf. [8]) $\mathbf{L}$ を $\mathbf{intS4}\Box$ の *normal extension* とする. $V(\mathbf{L})$ および $V'(\mathbf{L})$ はそれぞれ $\mathbf{GintS4}_{\Box}$ に次の形の始式を付け加えて得られる体系とする.

- $V(\mathbf{L})$ $\Gamma \to$, ただし $\mathbf{L} \vdash \Gamma \to$,
- $V'(\mathbf{L})$ $\Box\Gamma \to$, ただし $\mathbf{L} \vdash \Box\Gamma \to$.

このときこれらの体系は *cut-free* となる.

Proof.) 志村 [8] の $V(\mathbf{L})$ の証明と同様. *Q.E.D.*

Lemma 22 $A(p)$ を $\Box\neg\neg p \supset \neg\neg\Box p$ とする. $\mathbf{S4} \vdash \neg B$ ならば

$$\mathbf{intS4}_{\Box} \vdash (\bigwedge_{\Box C \in \mathrm{Sub}(B)} \Box A(C)) \supset \neg B.$$

Proof.) **S4** に対する cut-free な体系における $\neg B$ の cut-free な証明の構成に関する帰納法による. *Q.E.D.*

Lemma 23 $A(p)$ を $\Box\neg\Box\neg p \supset \neg\Box\neg\Box p$ とする. $\mathbf{Triv} \vdash \neg\Box B$ ならば

$$\mathbf{intS4}_{\Box} \vdash (\bigwedge_{\Box C \in \mathrm{Sub}(B)} \Box A(C)) \supset \neg B.$$

Proof.) **Triv** に対する cut-free な体系における $\neg\Box B$ の cut-free な証明の構成に関する帰納法による. *Q.E.D.*

Corollary 24

$$V(\mathbf{S4}) = \mathbf{intS4}_\Box + \Box\neg\neg p \supset \neg\neg\Box p,$$

$$V'(\mathbf{Triv}) = \mathbf{intS4}_\Box + \Box\neg\Box\neg p \supset \neg\Box\neg\Box p.$$

であり，$A(p)$ を

$$\Box\neg\neg p \supset \neg\neg\Box p,\ \Box\neg\Box\neg p \supset \neg\Box\neg\Box p$$

のいづれかとすれば

$$\mathbf{intS4}_\Box + A(p) \vdash B \Leftrightarrow \mathbf{intS4}_\Box \vdash (\bigwedge_{\Box C \in \mathrm{Sub}(B)} \Box A(\Box C)) \supset B.$$

が成立する．

Corollary 25 $A(p)$ を

$$\Box(\Box(p \supset \Box p) \supset p) \supset p,\ \Box\neg\neg p \supset \neg\neg\Box p,\ \Box\neg\Box\neg p \supset \neg\Box\neg\Box p$$

のいづれかとすれば$\mathbf{intS4}_\Box + A(p)$ では *Craig* の補間定理が成立する．

Proof.) 前原の方法 (cf. 志村 [8]) によるものと Lemma 20 と Corollary 24 によるものがある．*Q.E.D.*

5 補足

直観主義論理上では $\Diamond$ は他の論理記号や様相 $\Box$ とは独立である．$\mathbf{intS4}_\Box$ は様相として $\Box$ しか含んでいないが，$\Diamond$ も含む場合にはどうなるだろうか．

$\mathbf{GintS4}_\Box$ に $\Diamond$ に関する推論を加える場合は

$$\frac{\Gamma \to A}{\Gamma \to \Diamond A}$$

$$\frac{A, \Box\Gamma \to \Diamond\Delta}{\Diamond A, \Box\Gamma \to \Diamond\Delta}$$

を考えるのは自然であろう．

一方 $\mathbf{G'intS4}_\Box$ に対しては

$$\frac{\Gamma \to \Delta, A}{\Gamma \to \Delta, \Diamond A}$$

$$\frac{A, \Box\Gamma \to \Diamond\Delta}{\Diamond A, \Box\Gamma \to \Diamond\Delta}$$

が考えられる．共に cut-elimination は成立するが，前者の体系では

$\Diamond(p \vee q) \supset \Diamond p \vee \Diamond q$

は証明できないのに対し，後者では証明可能であるからこれらは真に異なる強さを持つ．
前者には前原の方法が適用できるので次が容易に示せる．

Fact 26

$\mathbf{intS4}_{\Box} + p \supset \Diamond p + \Diamond\Diamond p \supset \Diamond p + \Box(p \supset q) \supset (\Diamond p \supset \Diamond q)$

では *Craig* の補間定理が成り立つ．

しかし，この論理に対する semantics は知られていないので，この論理に対し，3 節の filtration method が適用できるかどうかは筆者にはわからない．
逆に後者に対しては semantics は知られているが，**LJ**$'$ 型の体系には前原の方法が適用できるかどうか不明なため、この論理で Craig の補間定理が成立するかどうかはわからない．
また，$\Box\Diamond p \supset \Diamond\Box p$ のような公理をつけ加えた場合にどうなるかは興味深い問題と思われる．

参考文献

[1] Avron, A., *On modal systems having arithmetical interpretations,* **Journal of Symbolic Logic** 49 (1984), 935-942.

[2] Boričić, B.R., *Interpolation theorem for intuitionistic S4,* **Bull. Sect. of Logic, Pol. Acad. Sci.** 20 (1991), 2-6.

[3] Luppi, C., *On the interpolation property of some intuitionistic modal logics,* **Archives for Mathematicsl Logic**, 35 (1996), 173-189.

[4] Maehara, S., *Eine Darstellung der intuitionistischen logik und der Klassischen,* **Nagoya Mathematical Journal** 7 (1954), 45-64.

[5] Maksimova, L.L., *Interpolation in normal modal logics,* (in Russian) **Mat. Issled. 98 Neklass Logiki** (1987), 40-56, 153.

[6] Ono, H., *On some intuitionistic modal logics,* **Puplications of R.I.M.S.** 13 (1977), 55-67.

[7] Prawitz, D., and Malmnäs, P.-E., *A survey of some connections between classical, intuitionistic and minimal logics,* in: **Contribution to mathematical logic (ed. by A.Schmitt, K.Schütte and H.-J.Thiele),North-Holland** (1968), 215-229.

[8] Shimura, T., *Cut-free systems for some modal logics containing S4,* **Reports on Mathematical Logic** 26 (1992), 39-65.